Exam, Capitole Avansate de Informaticã Teoreticã (CAIT'08)

January 12, 2009

1 Reguli

Rezolvaţi cât mai multe probleme din lista de mai jos. **Fiţi concişi şi la obiect**, nu se acordã credit parţial pentru rãspunsuri nerelevante.

Puteţi folosi orice surse auxiliare, inclusiv materialele de pe pagina cursului/grupul de discuţii. **NU COPIAŢI, scrieţi cu cuvintele voastre**. Dacã suspectez cã rãspunsul nu vã aparţine veţi susţine examen oral, in care **trebuie sã dovediţi ca inţelegeţi ce aţi scris.**

Termenele limitã pentru primirea rãspunsurilor voastre sunt **duminica 18 Ianuarie, ora 6PM** prin e-mail (gabriel.istrate@gmail.com) si luni 19 Ianuarie la ora 10 in persoanã, la cam. 045B (Institutul e-Austria). Termenele de mai sus sunt *stricte*.

2 Intrebãri

1. Arãtaţi cã urmãtoarea problemã de decizie are un algoritm polinomial: fiind dat un graf $G = (V, E)$ sã decidem dacã existã o colorare a vârfurilor lui G cu 2 culori astfel incât nicio muchie a lui G sã nu aibã o muchie coloratã cu aceeaşi culoare. **Folosiţi cuvintele voastre, nu noţiuni de teoria grafurilor precum cea de graf bipartit.**

2. Arãtaţi cã dacã $A \in NP$ şi $B \leq_m^P A$ atunci $B \in NP$.

3. Fie G un graf. Arãtaţi cã existã o colorare a vârfurilor lui G cu $k \geq 2$ culori astfel incât cel mult o proporţie de $1/k$ din numãrul muchiilor lui G au aceeaşi culoare.

4. Considerãm urmãtoarea problemã de programare liniarã:

$$max(2X_1 + X_2 + X_3) :$$

$$\begin{cases} \mathrm{X}_1 + 2X_2 + X_3 \leq 2 \\ \mathrm{X}_1 - X_2 \leq 3 \\ \mathrm{X}_2 - 2X_3 \leq 1 \\ \mathrm{X}_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

   Scrieţi problema dualã, şi explicaţi regulile pe care le-aţi folosit pentru a o obţine.

5. Dacã la o loterie câstigul mediu este de 1 leu (dar nu ştim nimic altceva), daţi o margine superioarã pentru probabilitatea sã câstigãm cel puţin 10000 de lei.

6. Definiţi problema acoperirii cu mulţimi. Care este performanţa algoritmului de aproximare pe care l-am vãzut la curs ? Explicaţi in cuvinte (intuitiv, *nu* matematic) ce inseamnã acest lucru (referitor la performanţã).

7. Fie X urmãtoarea variabilã aleatoare:

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

   Calculaţi media lui X ($E[X]$).

8. *Constanta de integralitate* a unei probleme de programare I in numere intregi (de minimizare) este raportul α intre costul soluţiei optime şi costul soluţiei optime pentru problema relaxatã P. Arãtaţi cã performanţa algoritmului primal-dual (cu metoda de analizã din curs) este mai mare sau egalã cu α (Ajutor: am fãcut problema la seminar).

9. In problema Pãdurii Steiner (rezolvatã cu ajutorul metodei primal-dual) in ce condiţii incrementãm valoarea unei variabile din soluţia primalã (de la 0 la 1) ? (Cu alte cuvinte când adãugãm o muchie ?)

10. Existã probleme NP-complete care au algoritmi polinomiali ? Argumentaţi-vã rãspunsul.

11. (Nu se punctezã) Ce subiect v-a plãcut cel mai mult din cele predate in curs ?